משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרופ' ג'רמי שיף

<http://u.math.biu.ac.il/~schiff/Teaching/240>

המבחן יהיה עם חומר פתוח

1. משוואות דיפרנציאליות רגילות(מד"ר) מסדר ראשון

# הגדרה

מד"ר מסדר ראשון היא יחס מהצורה (\*) כאשר

### דוגמאות

* פונקציה קבועה
* פתרון אפשרי -
* פתרון אפשרי -

פתרון של המד"ר (\*) הוא פונקציה מוגדרת על קטע כך שלכל ( גזירה בקטע )

# הגדרה

מד"ר מסדר ראשון בצורה נורמלית היא יחס מהצורה .

פתרון של (\*\*) הוא פונקציה כך ש(כמו קודם, y צריכה להיות מוגדרת וגזירה על...)

# דוגמאות

1. פתרון כללי: C קבוע

**הערה**: פתרון כללי – פתרון שמכסה את כל הפתרונות האפשריים.

## באופן יותר כללי

אם  *כאשר פונקציה קבועה, הפתרון הכללי הוא .*

*אחת הדרכים לקבוע את הקבוע הוא לתת אינפורמציה על הערך של y בנקודה מסויימת: כלומר לקבוע*

## בעיית קושי Cauchy's Problem

מד"ר מסדר ראשון בצורה נורמלית בתוספת "תנאי התחלה":

הוא פיתרון. נניח (זהותית) ונחלק בy: . נניח , ואז צד שמאל הוא נגזרת של : . נוציא אינטגרל לשני הצדדים: אם מניחים מקבלים אותו פתרון על K שלילי. לכן הפתרון הכללי הוא כאשר k קבוע כלשהו.

## נפתור את בעיית קושי

אם יודעים ⇦ ⇦ ⇦ ניתן למצוא את K.

## באופן יותר כללי

K קבוע חופשי

**המשוואה הזו נקראת *משוואה ליניארית הומוגנית***

1. – "*משוואה ניתנת לפרידה*"

### תת דוגמה

*נציב ⇦*

, K קבוע חופשי

כאשר ⇦ . כאשר ⇦ . לכן הפתרון הכללי כולל את המקרה

# באופן יותר כללי

מחלקים ע"י ומבצעים אינטגרל:  
מציבים :  
אם ניתן לעשות את האינטגרלים מוצאים יחס בין ו.

יש לפעמים פתרונות מיוחדים(פתרונות סינגולריים)

1. *משוואה ליניארית*(מסדר ראשון)

ראינו שפתרון כללי של הוא .  
נחפש פתרון של (\*) בצורה . אם נקבל את הצורה הזאת, אזי:  
כדי ש יפתרון את (\*), יש לקחת כך ש

## תת דוגמה

### שלב הכנה - "המקרה ההומוגני"

נציב :

### המקרה ההומוגני:

נציב

1. *, , קבוע נתון.*

המקרה ההומוגני:

*נציב   
נדרוש :  
כאשר*

*ראינו שיש פתרון מיוחד כאשר . לכן אנחנו מצפים ש* *– כלומר שכאשר , הפתרון הכללי שואף לפתרון במקרה של :*

*הפתרון דווקא רציף כאשר*

באופן כללי, פתרון של **בעיית קושי**(**לא** של הפתרון הכללי) הוא רציף כפונקציה של פרמטר(הנכנס למשוואה באופן רציף)[לא נוכיח].

## נחזור לתת דוגמה (א)

*פתרון כללי*

*האם ניתן למצוא פתרון כך ש?  
לא – כאן לכל C. הסיבה לכך היא שהצד הימני - – אינו רציף ב*

*באופן יותר כללי: אם רוצים לפתור עם תנאי התחלה , חשוב ש תהיה רציפה ב*

# *ליתר דיוק* - *משפט הקיום והיחידות*

נתונה בעיית קושי , .  
אם

1. *קיימים כך ש רציפה ב*
2. *קיים במלבן D*
3. *f מקיים "תנאי ליפשיץ" בD*

אזי קיים פתרון אחד ויחיד לבעיית קושי, המוגדרת על קטע קטן הכולל את

## תנאי ליפשיץ

קיים K כך שלכל , בD,

אם גזירה כפונקציה של y, אזי קיים תנאי ליפשיץ(גזירות היא התכונה היותר חזקה)

## כאשר אין קיום ויחידות, מה קורה?

פתרון כללי . בהכרח

אם אני מבקש – אין פתרון.

*זה הפתרון  
 ⇦ ⇦ ⇦   
 ⇦ ⇦ ⇦*

אם , הפתרונות הם פרבולות מחייכות המשיקות לציר הx.  
אם , הפתרונות הם פרבולות עצובות המשיקות לציר הx.

*אם , הפתרון הוא ציר הx.*

*לכן, אם נתון לנו , חוץ מהפרבולות וציר הx אפשר גם לתת  
כלומר יורדים בפרבולה מחייכת לציר הx בנקודה , ממשיכים עם ציר הx עד נקודה , ושם יורדים בפרבולה בוכה. לכן יש אינסוף פתרונות.*

***יש גם מקרים אחרים.(אם אין קיום ויחידות – ייתכן כל מספר של פתרונות)***

1. *משוואה הומוגנית*

*איך פותרים? מציבים* – משוואה ניתנת לפרידה(שאנחנו כבר יודעים לפתור ע"י אינטגרציה, כמו בדוגמה (3))

### תת דוגמה

נציב   
מציבים ,